

No.2 全射・単射・全単射

この回のゴール

- 全射・単射・全単射の定義を述べ、具体的な写像について判定・証明できる.
- 定義域や終域を変えると、全射・単射かどうかが変わることを説明できる.
- 有限集合の間の写像と要素の個数の関係（鳩の巣原理）を使える.
- 線形写像が単射・全射であることを、核と像で判定できる.

■ 1. 全射・単射・全単射

No.1 で見たように、写像の定義には「終域 B の側」の条件がなかった. B の要素に矢印が「必ず来るか」「2 本以上来ないか」で、写像を分類しよう.

定義 1 全射・単射・全単射

写像 $f: A \rightarrow B$ について,

- (1) $f(A) = B$ のとき, すなわち

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$$

のとき, f は**全射**であるという. (B のどの要素にも矢印が来る.)

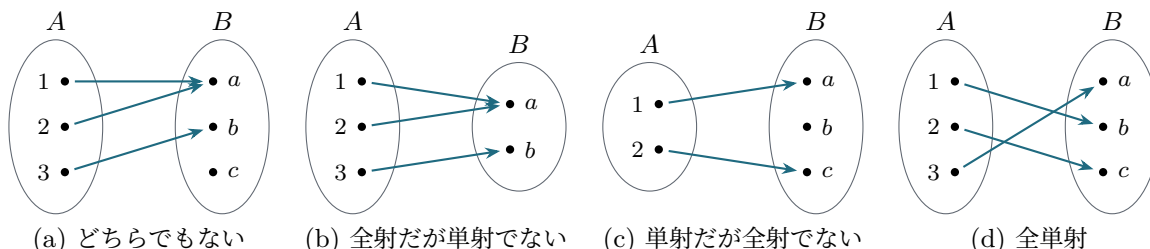
- (2) $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$ のとき, すなわち

$$\forall a, a' \in A, (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$$

のとき, f は**単射**であるという. (B のどの要素にも矢印が2 本以上来ない.)

- (3) 全射かつ単射であるとき, f は**全単射**であるという. (B のどの要素にも矢印がちょうど1 本来る.)

単射の定義の2つの書き方は、互いに対偶の関係にある (第1章 No.2 定理3). **証明では「 $f(a) = f(a')$ と仮定して $a = a'$ を導く」形が使いやすい.** 全単射を**1 対 1 対応**, 単射を**1 対 1 の写像**, 全射を上への写像と呼ぶ本もある. (「1 対 1」が単射を指すか全単射を指すかは本によって違うので、注意しよう.)



例 1 定義域・終域で変わる

式はすべて $f(x) = x^2$ だが、定義域・終域によって性質が変わる。

- (1) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 全射でない (-1 に行く x がない), 単射でない ($f(-1) = f(1)$).
- (2) $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$: 全射である ($y \geq 0$ に対して $x = \sqrt{y}$), 単射でない.
- (3) $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$: 全射でない, 単射である.
- (4) $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$: 全単射である.

終域をせまくすると全射に近づき、定義域をせまくすると単射に近づく. No.1 で「定義域と終域をセットで決める」と強調したのはこのためである.

例 2

- (1) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ は単射だが全射でない. 終域を $(0, \infty)$ にすると全単射になる.
- (2) $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$ は全射だが単射でない. 定義域を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限すると全単射になる. これが逆三角関数 $\arcsin$ を作るときの準備である (分野「微分積分」第1章 No.3 定義1).
- (3) 恒等写像 id_A は全単射. 包含写像 $C \rightarrow A$ は単射 ($C \neq A$ なら全射でない).

2. 全射・単射を証明する

全射・単射を示すときの「型」をまとめておく.

- **全射**: 「 $b \in B$ を任意にとる」から始めて, $f(a) = b$ となる $a \in A$ を見つけてみせる (方程式 $f(a) = b$ を解く). 見つけた a が本当に A に入っているかの確認を忘れない.
- **単射**: 「 $f(a) = f(a')$ とする」から始めて, $a = a'$ を導く.
- **全射でない**: 矢印が来ない $b \in B$ を1つあげる. **単射でない**: $a \neq a'$ で $f(a) = f(a')$ となる例を1つあげる.

例題 1

次の写像が全単射であることを示せ.

$$(1) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2 \quad (2) g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x + y, x - y)$$

【解答】 (1) **単射**: $f(x) = f(x')$ とすると $3x + 2 = 3x' + 2$ より $x = x'$. **全射**: $y \in \mathbb{R}$ を任意にとる. $x = \frac{y-2}{3}$ とおくと $x \in \mathbb{R}$ で, $f(x) = y$.

(2) **単射**: $g(x, y) = g(x', y')$ とすると, $x + y = x' + y'$, $x - y = x' - y'$. 辺々を足して $2x = 2x'$, 引いて $2y = 2y'$ なので $(x, y) = (x', y')$.

全射: $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ を任意にとる. $x + y = u$, $x - y = v$ を解いて $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ とおけば, $g(x, y) = (u, v)$.

例題 2

$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(n) = 2n$ は単射だが全射でないことを示せ.

【解答】 **単射**: $2n = 2n'$ なら $n = n'$. **全射でない**: $1 \in \mathbb{Z}$ に対して, $2n = 1$ となる整数 n はない. (終域を $\mathbb{R}$ ではなく $\mathbb{Z}$ にしているのが, 「 $n = \frac{1}{2}$ 」は答えにならない. 全射の証明で「見つけた a が A に入る

か」を確かめるのはこのためである.)

実数の関数については、微分を使った判定法が便利である。

定理 1

区間 I で定義された関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が狭義単調増加 (または狭義単調減少) ならば, f は単射である。

【証明】 $x \neq x'$ とし, $x < x'$ としてよい. 狭義単調増加なら $f(x) < f(x')$ なので $f(x) \neq f(x')$. 減少のときも同様. $\square$

例 3

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$ は全単射である. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ なので, 分野「微分積分」第1章 No.4 定理4より f は狭義単調増加で, 定理1より単射. また $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ なので, 任意の y に対して $f(a) < y < f(b)$ となる a, b があり, 中間値の定理 (分野「微分積分」第1章 No.1 定理6) より $f(c) = y$ となる c がある. よって全射.

■ 3. 有限集合と写像 (鳩の巣原理)

定理 2

A, B を有限集合, $f: A \rightarrow B$ を写像とする.

- (1) f が単射ならば, $|A| \leq |B|$.
- (2) f が全射ならば, $|A| \geq |B|$.
- (3) f が全単射ならば, $|A| = |B|$.
- (4) $|A| = |B|$ のとき, f が単射 $\iff f$ が全射 $\iff f$ が全単射.

【証明】 値域 $f(A)$ の要素の個数について, $|f(A)| \leq |A|$ であり, 等号が成り立つのは f が単射のときに限る (A の要素を f で送るとき, 行き先が重なるたびに個数が減る). また $f(A) \subset B$ なので $|f(A)| \leq |B|$ で, 等号が成り立つのは $f(A) = B$, つまり f が全射のときに限る.

(1) 単射なら $|A| = |f(A)| \leq |B|$. (2) 全射なら $|B| = |f(A)| \leq |A|$. (3) は (1), (2) から従う.

(4) $|A| = |B| = n$ とする. f が単射なら $|f(A)| = n = |B|$ なので $f(A) = B$, すなわち全射. f が全射なら $|f(A)| = |B| = n = |A|$ なので単射. よって3つの条件は同値である. $\square$

定理2 (1) の対偶は, 次の形でよく使われる.

定理 3 鳩の巣原理

有限集合 A, B が $|A| > |B|$ をみたすならば, どんな写像 $f: A \rightarrow B$ も単射でない. すなわち, $a \neq a'$ かつ $f(a) = f(a')$ となる a, a' が存在する.

「 $n+1$ 羽の鳩が n 個の巣に入れば, 2羽以上入る巣がある」ということである. たとえば, 13人いれば誕生月が同じ人が必ずいる (人の集合から月の集合への写像を考える). 引き出し論法 (ディリクレの部屋割り論法) とも呼ばれる.

例題 3

1 から 10 までの整数から異なる 6 個を選ぶと, その中に和が 11 になる 2 数が必ずあることを示せ.

【解答】1 から 10 を、和が 11 になる 5 つの組 $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$ に分ける. 選んだ 6 個の数それぞれに、それが属する組を対応させる写像を考えると、 $6 > 5$ なので定理 3 より単射でない. つまり、同じ組から 2 数が選ばれていて、その 2 数の和は 11 である.

無限集合では成り立たない

定理 2 (4) は有限集合に特有の性質である. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$ は単射だが、1 に行く n がないので全射でない. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}$ で「同じ個数」なのに、単射でも全射とは限らない. 無限集合の「個数」の不思議さは、第 3 章で詳しく見る.

■ 4. 線形写像の単射・全射

定理 4

ベクトル空間 V , W の間の線形写像 $f: V \rightarrow W$ について、

- (1) f が単射 $\iff \text{Ker } f = \{0\}$
- (2) f が全射 $\iff \text{Im } f = W$

【証明】(2) は全射の定義そのもの ($\text{Im } f = f(V)$) である. (1) を示す.

($\Rightarrow$) $x \in \text{Ker } f$ とすると $f(x) = 0 = f(0)$. 単射なので $x = 0$.

($\Leftarrow$) $f(x) = f(y)$ とすると、線形性より $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, つまり $x - y \in \text{Ker } f = \{0\}$. よって $x = y$. □

一般の写像では単射を確かめるのに「すべての組 a, a' 」を調べる必要があるが、線形写像では「 0 に行くのが 0 だけか」を調べれば済む. 核と像については分野「線形代数」第 5 章 No.2 を参照しよう.

コラム：次元定理は「鳩の巣原理」の線形代数版

$\dim V = \dim W = n$ (有限) のとき、次元定理 $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$ (分野「線形代数」第 5 章 No.3) より、

$$f \text{ が単射} \iff \dim \text{Ker } f = 0 \iff \dim \text{Im } f = n \iff f \text{ が全射}.$$

これは定理 2 (4) 「要素の個数が同じなら、単射 $\iff$ 全射」とそっくりである. 有限集合では「個数」、有限次元ベクトル空間では「次元」が同じ役割を果たしている. 正方行列 A について「 $Ax = 0$ が自明な解しかもたない $\iff$ どんな b に対しても $Ax = b$ が解をもつ」のも、この現れである.

■ 練習問題

1. 次の写像は全射か, 単射か. 理由をつけて答えよ.

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$

(3) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + 1$

(4) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n + 1$

(5) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$

(6) $f: \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}, f(S) = |S|$

2. $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ が写像として定まり, 全単射であることを示せ.

3. 次の個数を求めよ.

(1) $\{1, 2, 3\}$ から $\{a, b\}$ への全射の個数, 単射の個数.

(2) $|A| = m, |B| = n$ ($m \leq n$) のとき, A から B への単射の個数.

4. n を自然数とする. どんな $n+1$ 個の整数を選んでも, その中に「差が n で割り切れる」2 数があることを示せ.

5. 写像 $f: A \rightarrow B$ と $C, C_1, C_2 \subset A, D \subset B$ について, 次を示せ. (No.1 定理 2・定理 3 の等号が成り立つ条件である.)

(1) f が単射ならば, $f^{-1}(f(C)) = C$.

(2) f が全射ならば, $f(f^{-1}(D)) = D$.

(3) f が単射ならば, $f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$.

6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は全射か, 単射か.

7. (考えてみよう) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$ が全単射であることを示せ. (この全単射は第3章 No.1 で再び登場する.)

■ 練習問題の解答

- (1) 全単射. $x^3 = x'^3$ なら, $x^3 - x'^3 = (x - x')(x^2 + xx' + x'^2) = 0$ で, $x \neq x'$ なら $x^2 + xx' + x'^2 = \left(x + \frac{x'}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x'^2 > 0$ となるので $x = x'$. 任意の y に $x = \sqrt[3]{y}$ が対応するので全射.

(2) 全射だが単射でない. $f(0) = f(1) = 0$. 全射は, $x \rightarrow \pm\infty$ で $f(x) \rightarrow \pm\infty$ と中間値の定理から.

(3) 単射だが全射でない (1 に行く n がない).

(4) 全単射. $n + 1 = n' + 1$ なら $n = n'$. 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$.

(5) 全射だが単射でない. $f(t, 0) = t$ なので全射. $f(1, 0) = f(0, 1)$.

(6) 全射だが単射でない. $|\emptyset| = 0$, $|\{1\}| = 1$, $|\{1, 2\}| = 2$, $|\{1, 2, 3\}| = 3$ なので全射. $f(\{1\}) = f(\{2\})$.
2. 写像として定まる: $x \neq 1$ なら分母は 0 でなく, $f(x) = 1$ とすると $x + 1 = x - 1$ となり矛盾するので, $f(x) \neq 1$.

単射: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$ とすると, 分母をはらって $(x+1)(x'-1) = (x'+1)(x-1)$. 展開すると $xx' - x + x' - 1 = xx' - x' + x - 1$, すなわち $2x' = 2x$.

全射: $y \neq 1$ を任意にとる. $\frac{x+1}{x-1} = y$ を解くと $x = \frac{y+1}{y-1}$. $y \neq 1$ なのでこれは実数で, $x \neq 1$ ($x = 1$ なら $y + 1 = y - 1$ で矛盾). $f(x) = y$ となる.
- (1) 写像は全部で $2^3 = 8$ 個. このうち全射でないのは, すべて a に行くものとすべて b に行くものの 2 個なので, 全射は 6 個. 単射は, $3 > 2$ なので鳩の巣原理より 0 個.

(2) $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ の行き先を順に決める. a_1 は n 通り, a_2 は a_1 の行き先以外の $n - 1$ 通り, $\dots$, a_m は $n - m + 1$ 通り. よって $n(n-1)\cdots(n-m+1) = {}_nP_m$ 個.
- 各整数に「 n で割った余り」($0, 1, \dots, n-1$ のどれか) を対応させる写像を考える. $n+1$ 個の整数から n 個の余りへの写像なので, 鳩の巣原理より, 余りが等しい 2 数がある. その 2 数の差は n で割り切れる.
- (1) No.1 定理 3 (1) より $C \subset f^{-1}(f(C))$. 逆に $x \in f^{-1}(f(C))$ とすると $f(x) \in f(C)$ なので, $f(x) = f(c)$ となる $c \in C$ がある. f は単射なので $x = c \in C$.

(2) No.1 定理 3 (2) より $f(f^{-1}(D)) \subset D$. 逆に $y \in D$ とすると, 全射なので $f(x) = y$ となる $x \in A$ がある. $f(x) \in D$ より $x \in f^{-1}(D)$ なので, $y = f(x) \in f(f^{-1}(D))$.

(3) No.1 定理 2 (2) より $\subset$ は成り立つ. $y \in f(C_1) \cap f(C_2)$ とすると, $y = f(c_1) = f(c_2)$ ($c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$) と書ける. f は単射なので $c_1 = c_2$ で, これは $C_1 \cap C_2$ に属する. よって $y \in f(C_1 \cap C_2)$.
- $\text{rank } A = 2$ なので $\dim \text{Im } f = 2$, すなわち $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ で全射. 次元定理より $\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$ なので $\text{Ker } f \neq \{0\}$ で, 単射でない. (実際, $Ax = 0$ を解くと $x = t(-1, -1, 1)$ で, たとえば $f(-1, -1, 1) = 0 = f(0, 0, 0)$.)
- 全射: $k \in \mathbb{N}$ を任意にとる. k を素因数分解したときの 2 の指数を e とすると, $k = 2^e \times (\text{奇数})$ と書ける. 奇数を $2n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $m = e + 1$ とおけば, $f(m, n) = k$.

単射: $2^{m-1}(2n-1) = 2^{m'-1}(2n'-1)$ とする. $m < m'$ とすると, 両辺を 2^{m-1} で割って $2n-1 = 2^{m'-m}(2n'-1)$ となり, 左辺は奇数, 右辺は偶数で矛盾. $m > m'$ でも同様なので $m = m'$. すると $2n-1 = 2n'-1$ より $n = n'$.